

Un CSP comme comportement d'agent. Application à la résolution d'équations en physique des milieux granulaires

Laurent Breton
IRIN
2, rue de la Houssinière
44322 Nantes Cedex 3
breton@irin.univ-nantes.fr

Narendra Jussien
Ecole des Mines de Nantes
4 Rue Alfred Kastler
44307 Nantes Cedex 3
Narendra.Jussien@emn.fr

Résumé

En physique des milieux granulaires, des méthodes de simulations numériques sont utilisées notamment pour tenter de comprendre la connexion entre les grains et les structures mécaniques macroscopiques dans le tas. Nous avons proposé une modélisation multi-agent originale qui permet de résoudre des tas de sable bidimensionnels à l'équilibre statique. Mais, le caractère stochastique de la recherche locale de solutions d'équilibre pose le problème de la couverture de l'espace des solutions par cet algorithme. La résolution de ce problème par une approche purement CSP se révèle difficile du fait de la taille gigantesque du problème à traiter. Nous proposons donc de mettre en œuvre des techniques de CSP comme comportements de résolution local de l'équilibre d'agents-grains.

1 Introduction

L'étude des matériaux granulaires pose de nouveaux types de problèmes aux chercheurs de ce domaine. Un problème central qui occupe nombre d'équipes de recherche est la compréhension de la structure mécanique d'un empilement à l'équilibre statique.

Nous avons, par le passé, proposé un algorithme original GRANUSOLVE, basé sur une approche multi-agent, pour simuler de tels empilements [Breton *et al.*, 2000]. Mais, le caractère stochastique de la recherche locale de solutions d'équilibre pose le problème de la couverture de l'espace des solutions par cet algorithme. La résolution de ce problème par une approche purement CSP se révèle difficile du fait de la taille gigantesque du problème à traiter (la modélisation d'un empilement peut compter plusieurs centaines de milliers de variables et de contraintes). Nous proposons donc de mettre en œuvre

des techniques de CSP comme comportements de résolution local de l'équilibre d'agents-grains. Dans un premier temps, notre but est de valider cette approche pour un cas simple d'empilement avant de pouvoir envisager l'étendre, dans un second temps, au cas d'empilements plus génériques. En effet, pour des grains de tailles différentes, le nombre et la position des contacts diffèrent pour chaque grain.

La section suivante décrit les motivations qui nous ont menés à considérer le problème de la simulation d'empilements de grains à l'équilibre statique. Nous décrivons, dans la section 3, le modèle de l'équilibre d'un grain que nous utilisons pour nos simulations. Notre algorithme de résolution par agents et ses limitations sont présentés dans la section 4. La modélisation, en termes de CSP, de l'équilibre d'un grain en contact avec des grains voisins est détaillée dans la section 5. Enfin, la section 6 conclut sur cette approche et donne quelques perspectives de recherche.

2 Le réseau de forces dans un tas à l'équilibre statique

2.1 Introduction

Il y a quelques années, Pierre-Gilles de Gennes a lancé un appel à la communauté des chercheurs en physique mécanique pour aborder le problème de la physique des milieux granulaires. De Gennes décrit le champ des milieux granulaires comme étant un exemple simple de systèmes physiques complexes [de Gennes, 1995]. Effectivement, les empilements de grains posent de nouveaux types de problèmes aux physiciens. Car, contrairement à l'étude d'un solide, les *granulaires* se comportent de façon apparemment imprévisible. Illustrons, sur un exemple concret, les problèmes que posent quotidiennement les milieux granulaires, notamment dans les processus industriels.

2.2 L'exemple des silos

Les silos sont de plus en plus présents dans l'industrie (pharmaceutique, chimique, alimentaire, etc.) pour stocker les matières premières sous la forme de granules ou de poudre. Ces grains, plus ou moins calibrés, peuvent ainsi être directement traités dans la chaîne de transformation de ces matières premières en produits finis. Mais le stockage industriel de tels matériaux pose des problèmes et peut même entraîner des catastrophes.

L'écoulement d'un silo est parfois stoppé par la formation d'une voûte de grains (cf. Fig. 1). Cette voûte, très solide, supporte alors une bonne partie de la charge du silo et est difficile à briser. A l'heure actuelle, les ingénieurs n'ont souvent pas trouvé d'autre moyen que de marteler la paroi du silo en espérant ainsi briser la voûte. De plus, lorsque la voûte est enfin brisée, le granulaire se trouve mélangé à une grande quantité d'air. Il se comporte alors comme un liquide et s'écoule brutalement vers le réceptacle. Le granulaire peut ainsi déborder et causer des pertes voire des dégâts matériels ou mort d'hommes. La compréhension de ces phénomènes de formation de voûtes, de leur écroulement et la capacité à prédire les catastrophes qui en sont parfois les conséquences est d'une importance vitale.

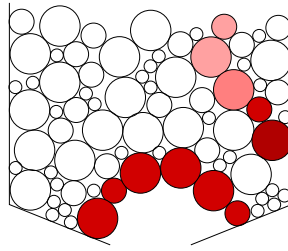


FIG. 1 – Voûte dans un silo

2.3 Un problème central : comprendre la structure du réseau de forces dans un tas

Les problèmes des silos, du broyage, du cisaillement, etc., sont de nature très différentes mais ils ont tous un point en commun : *le réseau de forces dans un granulaire à l'équilibre statique*. Ainsi, les chercheurs en physique des milieux granulaires tentent actuellement de comprendre la structure et la dynamique du réseau de forces qui soutient l'équilibre d'un milieu granulaire. C'est le problème central qui permettra ensuite de développer des applications pour nombre de problèmes concrets.

2.3.1 Visualisation de réseaux de forces

Des expérimentations, menées sur des empilements de cylindres de plexiglas, ont permis de mettre visuellement en évidence la présence d'un réseau de forces dans un tas à l'équilibre statique. Ces expérimentations se basent sur le principe de la photo-

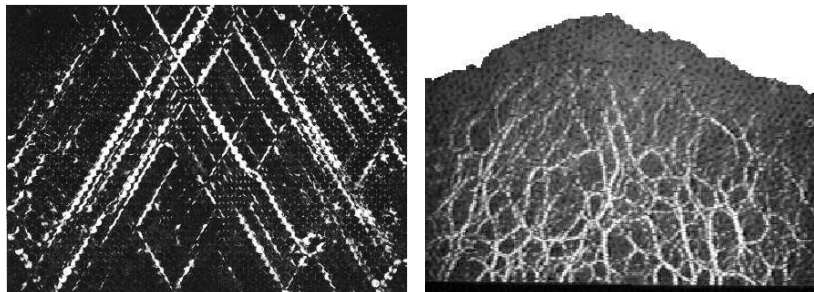


FIG. 2 – Visualisation du réseau de lignes de forces dans des tas réels

a) tas confiné et fortement comprimé

b) tas ne supportant que son propre poids (Prof. R.P. Behringer)

élasticité [Travers *et al.*, 1986; De Josselin de Jong et Verruijt, 1969]. L'empilement de cylindres en plexiglas est éclairé entre lumières polarisantes et sans aucune contrainte, il apparaît comme sombre. A l'inverse, une forte charge va légèrement déformer le grain ce qui va faire tourner le plan de polarisation de la lumière et le grain apparaîtra ainsi localement plus lumineux (cf. Fig. 2.a et 2.b). Les mesures réalisées dans le cadre des expérimentations réelles sont assez peu informatives et ne permettent pas d'appréhender facilement la structure interne du réseau de forces. La simulation numérique est donc un

outil essentiel [Radjai, 1995] pour la réalisation des modèles conçus par les physiciens. Ces simulations permettent souvent de faire des hypothèses validées *a posteriori* par des expérimentations réelles.

3 Le modèle de Clément et d'Eloy

Dans cette section, nous présentons un modèle simple de l'équilibre statique d'un empilement proposé par Éric Clément et Christophe Eloy [Eloy et Clément, 1997]. Ce modèle caractérise l'équilibre d'un grain sous la contrainte de frottement en chacun de ses contacts, selon la loi de frottement de Coulomb. Nos simulations se basent sur ce modèle pour calculer l'équilibre des grains dans un tas. D'une manière générale, ces travaux font l'objet d'une collaboration avec l'équipe d'Éric Clément du Laboratoire des Milieux Désordonnés et Hétérogènes (Paris 6).

3.1 La description des conditions limites

Clément et Eloy proposent de s'intéresser à l'étude d'empilements bidimensionnels en boulets de canon de sphères dures et régulières (cf. Fig. 3). Afin de s'affranchir des

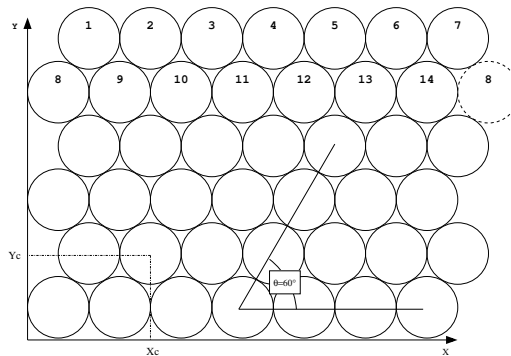


FIG. 3 – *Empilement compact triangulaire*

effets dûs aux conditions aux limites, ils supposent que le tas est cylindrique et qu'il ne possède pas de plancher. Ainsi, le grain numéro 7 aura pour voisins les grains numéros 1, 6, 8 et 14 (cf. Fig. 3). Matériellement, il faut s'imaginer un mur de grains (2D) qui se referme sur lui-même. De plus, les contacts latéraux ont été volontairement négligés pour simplifier encore le modèle (il n'y a pas de contact effectif entre les grains 4 et 5). Enfin, le tas est à l'équilibre statique lorsque tous les grains qui le composent sont eux-mêmes à l'équilibre, au sens de Newton. Malgré toutes ces simplifications, ce modèle permet déjà d'appréhender la complexité de la structure du réseau de forces d'un milieu granulaire à l'équilibre statique. En effet, ce modèle possède un paramètre de désordre mécanique : la rugosité des grains. De plus, les physiciens de l'équipe souhaitaient engendrer des solutions pour un modèle d'empilement le plus simple possible car les relations de causalité entre les phénomènes macroscopiques observés dans le tas et les conditions limites initiales sont très difficiles à établir lorsque ces conditions limites sont elles-mêmes nombreuses et complexes.

3.2 Le frottement μ : paramètre de désordre mécanique

Le désordre géométrique est inexistant du fait de la régularité de l'empilement et donc du réseau de contacts. La présence de frottement, qui traduit la rugosité des grains, permet d'ajouter un désordre mécanique dans le modèle. Prenons l'exemple d'une brique

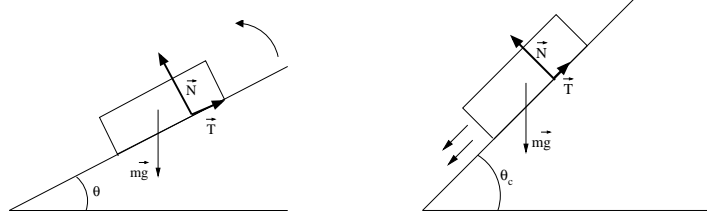


FIG. 4 – Le frottement statique a) brique à l'équilibre b) la brique décroche.

posée sur un plan incliné (cf. Fig. 4). En montant progressivement le plan incliné la brique fini par *décrocher*. Cet angle critique θ_c à partir duquel la brique décroche est constant quelle que soit la surface de contact (à poids et à matériaux constants). Ainsi, à chaque paire de matériaux correspond un coefficient de frottement unique, noté μ , qui n'est autre que la tangente de l'angle critique : $\mu = \tan(\theta_c)$.

D'un point de vue mécanique, cela signifie que pour être à l'équilibre, la force qu'exerce la brique sur le plan incliné doit être comprise entre deux valeurs que définissent le *cône de Coulomb*.

La présence de frottement dans notre modèle, au sens de Coulomb, entraîne donc une indétermination des forces de contact. Ainsi, plus le coefficient de frottement est faible (grains peu rugueux) et moins il y aura de valeurs possibles pour la valeur des forces de contact inter-grains. Inversement, plus la valeur de frottement est grande, plus l'espace des possibles sera grand et ce en chacun des points de contact inter-grains.

3.3 L'équilibre d'un grain

Les équations de l'équilibre d'un grain soumis à des forces de contact et à la gravité g sont données par les lois de Newton (cf. Fig. 6). La loi de Newton nous donne l'équilibre par translation horizontale et verticale d'un grain sur lequel N forces de contact sont appliquées. De plus, nous imposons qu'il n'y ait pas de rotation sur le grain : le produit tensoriel des contraintes doit donc être nul.

Deux autres contraintes sont ajoutées en chacun des contacts. D'une part, les forces normales doivent être en compression, i.e. les forces doivent s'appliquer sur le grain et non l'inverse. D'autre part, les forces de contact doivent être contenues dans leur cône de frottement de Coulomb.

Chaque grain doit donc posséder un jeu de forces qui satisfasse simultanément les conditions d'équilibre statique et les contraintes d'orientation et de frottement à ses quatre points de contact. La condition de Coulomb, valable en chaque contact, est une double inégalité. Un empilement admet ainsi un grand nombre (en fait, une infinité) de solutions qui satisfont toutes les conditions de l'équilibre statique.

4 GranuSolve : Une approche Multi-Agent pour la “résolution de tas de sable”

Nous avons, par le passé, proposé une approche multi-agent pour résoudre des tas de sable à l'équilibre statique [Breton, 2002; Breton *et al.*, 2000]. Nous considérons un grain comme un agent essentiellement réactif [Drogoul, 1993; Ferber, 1990] dont le but est de trouver son équilibre en fonction de ses voisins. Cette modélisation nous a permis de décentraliser la résolution du tas localement à chaque grain. En effet, l'espace de recherche des solutions pour un tas est beaucoup trop grand pour être appréhendé de façon globale, alors que, localement, les possibilités qui s'offrent à chaque grain sont données par ses équations.

4.1 Comportement de résolution des agents-grains

L'agent-grain reçoit, par message, les valeurs de forces que les grains des contacts supérieurs ont calculé pour leur propre équilibre. Le grain vérifie alors que les contraintes qui lui sont appliquées sont compatibles avec son propre équilibre. Dans la négative (cf. Fig. 5), le grain ne peut pas garantir l'équilibre statique aux vues des forces qui lui sont appliquées. Il va donc essayer de trouver un jeu de forces des contacts supérieurs qui soit compatible avec son propre équilibre. Les valeurs de forces sont tirées aléatoirement

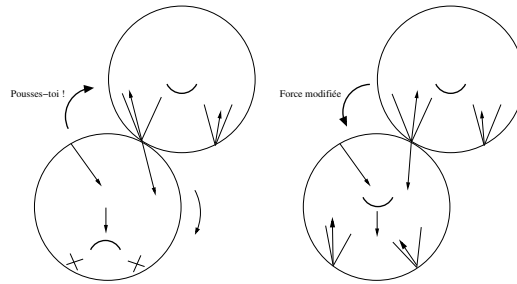


FIG. 5 – Le cas où le grain ne peut pas atteindre directement l'équilibre

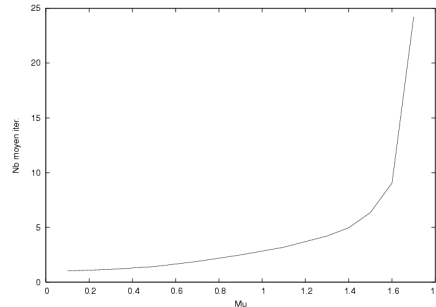
dans l'intervalle des possibilités communiquées par ses *parents* (grains voisins supérieurs). Le grain réitère les essais jusqu'à obtenir deux forces compatibles ou lorsque le nombre d'essais atteint un seuil *nombre_max_essais* (typiquement plusieurs centaines d'essais). Dans ce dernier cas, le grain considère qu'il n'a pas pu trouver de solution et va donc demander à l'un de ses parents de pousser ses propres parents. A cet instant, le grain se désactive et attend que son parent lui ait envoyé une nouvelle valeur de force pour tenter de se résoudre à nouveau.

Dans le cas de fortes valeurs de frottement, l'espace des valeurs de forces possibles est très grand et l'algorithme peut omettre des solutions. En effet, si l'espace des solutions est très réduit pour chacune des deux valeurs de forces des contacts supérieurs, la probabilité pour tirer simultanément deux valeurs dans ces intervalles est très faible. Ainsi, après un *nombre_max_essais* fixé de tentatives infructueuses, l'algorithme déclare ne pas avoir trouvé de solution pour l'équilibre de ce grain alors qu'il en existait peut-être.

4.2 Les performances

La taille des tas que nous pouvons résoudre est de quelques ordres de grandeurs supérieure à celle que peuvent résoudre les algorithmes classiques employés jusqu'à présent par les physiciens (cf. Tab. 1). De plus, les équations sont toutes résolues avec une précision de 10^{-6} , ce qui donne une confiance supplémentaire dans les solutions générées. Grâce à ces performances en temps et en taille de tas, nous avons pu mener une étude

Frott.	Temps	Iter/grain
0,1	0,593	1,02
0,5	2,441	1,42
0,7	4,466	1,89
0,9	7,422	2,49
1,1	14,935	3,19
1,3	21,632	4,22
1,5	44,583	6,36
1,7	185,427	24,23



TAB. 1 – Performances de GRANUSOLVE en temps (secs) et en nombre moyen d'itérations (taille de tas fixe (100x100) sur un G4 400Mhz).

statistique du modèle afin de dégager des comportements macroscopiques fiables des tas de sable [Breton *et al.*, 2002].

4.3 Les limitations de l'approche

Le caractère stochastique de la recherche d'un jeu de forces compatible avec l'équilibre d'un agent-grain pose le problème de la couverture de l'espace des solutions par cet algorithme. De plus, l'extension de notre algorithme au cas des grains de tailles variables pose le problème de la résolution des équations du modèle dans le cas où N contacts sont actifs avec p valeurs connues ($p < N$).

Une solution à ces deux problèmes consiste à modéliser, sous forme de contraintes numériques, la recherche des valeurs de forces possibles pour l'équilibre d'un grain.

5 Utilisation de CSP pour la recherche de forces compatibles pour un grain

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, lorsque les forces supérieures d'un grain sont incompatibles avec son propre équilibre, l'algorithme peut omettre des solutions existantes.

Nous proposons donc, dans un premier temps, d'effectuer la recherche d'une solution pour ce sous-problème par des techniques de CSP numériques. Ainsi, la résolution d'un agent-grain ne change pas, seul le comportement de recherche de forces compatibles est remplacé par l'instanciation, le filtrage et la résolution d'un CSP numérique.

5.1 CSP versus programmation linéaire

Les équations et inéquations caractérisant l'équilibre du grain, telles qu'elles sont données dans la section 5.2.3 suivante, sont toutes linéaires. Nous nous sommes donc posés la question de savoir si le problème n'aurait pas pu être traité par des techniques de programmation linéaire. En effet, les solveurs existants peuvent traiter des problèmes de très grandes tailles en des temps tout à fait raisonnables. Cependant, le problème qui nous intéresse, i.e. la recherche d'une solution à l'équilibre d'un empilement de grains, n'est pas un problème d'optimisation en soit. Une solution n'est pas a priori meilleure qu'une autre.

Biensûr, il tout à fait possible de modéliser le problème à l'aide d'une fonction d'optimisation comme, par exemple, maximiser le nombre de grains à l'équilibre. Cependant, il est primordial pour les physiciens de l'équipe, que les solutions générées soient non biaisées et que l'algorithme de résolution explore le plus largement possible l'espace des solutions.

Pour des conditions limites initiales données, une expérimentation *virtuelle* consiste à générer des milliers de solutions pour l'empilement ainsi préparé. Les caractéristiques des solutions obtenues sont moyennées afin de dégager un comportement macroscopique fiable du système physique. Ainsi, des solutions "particulières" (difficiles à atteindre algorithmiquement parlant ou solutions *sommets* issues d'un solveur linéaire, par exemple) auront un poids statistique faible et seront très peu représentatives du comportement macroscopique moyen du système physique.

Pour remédier à ce problème de biais, dans le cadre d'un solveur linéaire, il faudrait ainsi demander au solveur plusieurs sommets solutions pour pouvoir extraire une solution aléatoire par la méthode du barycentre. Le coût de la mise en œuvre de cette solution a confirmé notre choix d'une résolution par des techniques de CSP plutôt que par programmation linéaire.

5.2 Modélisation CSP de l'équilibre d'un grain

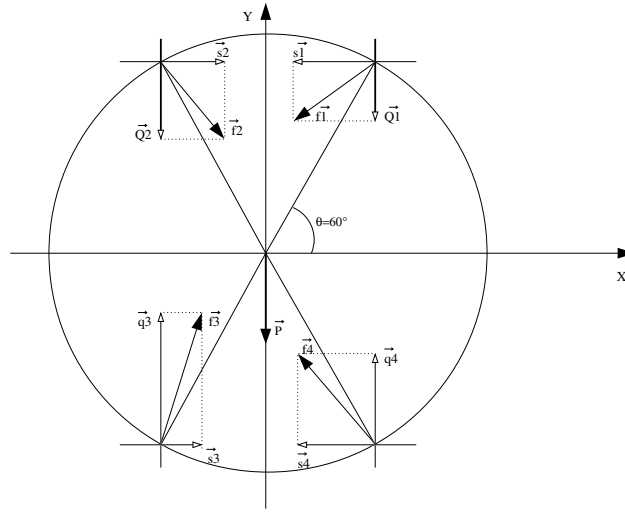
La modélisation de ce problème sous forme de CSP est très simple. Considérons le modèle d'équilibre décrit dans la section précédente. Aux composantes horizontales (S_i) et verticales (Q_i) des forces de contact du grain (cf. Fig. 6) nous faisons correspondre des variables réelles.

5.2.1 Les domaines

Les domaines des valeurs de forces peuvent être représentés par des réels, positifs ou négatifs selon l'orientation de la force dans le repère orthonormé $(0, \vec{x}, \vec{y})$.

5.2.2 Les variables

Dans le cas du modèle d'Eloy et Clément à quatre contacts fixes, nous pouvons extraire huit variables réelles du modèle dont deux sont déjà instanciées. Il s'agit des composantes verticales des forces des contacts supérieurs qui ont une valeur déterminée du fait des équations du modèle. Les domaines des six autres variables peuvent être initialisés à $[-\infty, +\infty]$.

FIG. 6 – *Modèle à quatre forces de contact*

5.2.3 Les contraintes

Les contraintes sont les équations et les inégalités du modèle qui caractérisent l'équilibre du grain en présence de frottement μ . Pour plus de lisibilité, nous distinguons les variables déjà connues, en majuscule, de celles à instancier qui sont écrites en minuscule (sauf m , la masse, et g , la valeur de la gravité, qui représentent des constantes connues). Les équations données ci-après sont obtenues après quelques transformations [Eloy et Clément, 1997].

Les équations d'équilibre du grain par translation horizontale, verticale et par rotation, s'écrivent respectivement :

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0 \quad (1)$$

$$Q_1 + Q_2 + q_3 + q_4 + mg = 0 \quad (2)$$

$$Q_1 - Q_2 - q_3 + q_4 + (-s_1 - s_2 + s_3 + s_4) \tan(\theta) = 0 \quad (3)$$

Et les conditions en chacun des contacts, d'une part l'orientation (vers l'intérieur du grain) des forces normales :

$$Q_1 \tan(\theta) + s_1 \leq 0 \quad (4a)$$

$$Q_2 \tan(\theta) - s_2 \leq 0 \quad (4b)$$

$$-q_3 \tan(\theta) - s_3 \leq 0 \quad (4c)$$

$$-q_4 \tan(\theta) + s_4 \leq 0 \quad (4d)$$

et, enfin, la contrainte de frottement de Coulomb qui est une double inégalité en chacun

des contacts :

$$Q_1(\mu \tan(\theta) - 1) + s_1(\tan(\theta) + \mu) < 0 \quad (5a)$$

$$Q_2(\mu \tan(\theta) + 1) + s_2(\tan(\theta) - \mu) < 0 \quad (5b)$$

$$q_3(-\mu \tan(\theta) + 1) + s_3(-\tan(\theta) - \mu) < 0 \quad (5c)$$

$$q_4(-\mu \tan(\theta) - 1) + s_4(-\tan(\theta) + \mu) < 0 \quad (5d)$$

et

$$Q_1(\mu \tan(\theta) + 1) + s_1(-\tan(\theta) + \mu) < 0 \quad (5e)$$

$$Q_2(\mu \tan(\theta) - 1) + s_2(-\tan(\theta) - \mu) < 0 \quad (5f)$$

$$q_3(-\mu \tan(\theta) - 1) + s_3(\tan(\theta) - \mu) < 0 \quad (5g)$$

$$q_4(-\mu \tan(\theta) + 1) + s_4(\tan(\theta) + \mu) < 0 \quad (5h)$$

Ainsi, un grain à quatre contacts fixés, de masse m et soumis à la gravité de valeur g est à l'équilibre statique si et seulement si les relations (1), (2), (3), (4) et (5) sont vérifiées.

De plus, en considérant les contraintes d'égalité comme des double inégalités, nous obtenons un ensemble de contraintes dont les cardinalités sont résumées dans le tableau 2.

Cardinal	Nombre de contraintes	Référence des contraintes
1	6	Unilatéralité (4a) et (4b), Coulomb (5a), (5b), (5e) et (5f)
2	8	Translation verticale (2), Unilatéralité (4c) et (4d), Coulomb (5c), (5d), (5g) et (5h)
4	2	Translation horizontale (1)
6	2	Rotation (3)

TAB. 2 – Les cardinalités de l'ensemble des contraintes

5.3 Filtrage et résolution d'un CSP

Dans un premier temps, nous avons implémenté, en C++, un solveur simple de tels problèmes sous contraintes numériques. L'algorithme de filtrage implémenté est des plus simples puisqu'il s'agit de l'algorithme AC-3 [Tsang, 1993].

5.3.1 Instanciation par dichotomie

L'instanciation d'un CSP se fait par dichotomie sur l'une ou les deux variables s_1 et s_2 . Nous utilisons un algorithme de recherche dichotomique classique. En effet, l'instanciation d'un CSP pour notre problème revient à trouver des valeurs possibles pour les forces des contacts supérieurs telles que le grain soit à l'équilibre, i.e. qu'il existe des solutions pour les forces des contacts inférieurs.

5.3.2 Performances et limitations

Malgré le caractère rudimentaire de notre algorithme de filtrage et l'absence de méthode de réparation, le solveur arrive à trouver des solutions aux problèmes qui lui

sont posés dans 99,7% des cas. Par contre, pour les cas restants, le solveur converge avec beaucoup de mal vers une solution : le nombre d'itérations croît de façon exponentielle avec la valeur de frottement. En effet, plus la valeur de frottement est élevée, plus les cônes de Coulomb sont ouverts et plus l'espace des possibles est grand. Le tableau 3 donne une idée des performances de notre solveur pour le problème tel qu'il a été modélisé dans la section 5.2. Dans environ 0,2% des cas étudiés, le solveur n'arrive pas à déterminer, dans

Frottement	Nb médian de tests de variables	Pourcentage médian de réductions	Nb max de tests de variables	Pourcentage d'échec
0.1	160	20,00	160	0
0.2	152	19,93	160	0
0.3	148	19,52	156	0
0.4	144	19,30	47872	0,19
0.5	143	18,88	$34,9 \cdot 10^6$	0,22

TAB. 3 – Les performances de notre solveur pour la résolution des équations d'un grain à quatre contacts fixes. Le très faible taux d'échecs (survenant après un choix dichotomique : le domaine d'une variable se retrouve vide après filtrage) indique que le filtrage est quasiment inefficace pour montrer qu'un choix dichotomique est mauvais.

un temps raisonnable, s'il existe une solution ou non par dichotomie. Il s'agit en fait de cas où le solveur tente de trouver deux valeurs simultanément pour les deux variables s_1 et s_2 , ce qui décuple la taille de l'espace de recherche. Les contraintes et la grandeur des domaines de s_1 et de s_2 ne permettent pas de déterminer, immédiatement après réduction des domaines par filtrage, si une réduction dichotomique sur une variable amène à un échec ou non. Ainsi, le solveur doit parcourir de façon quasi exhaustive le sous-espace des possibles avant de pouvoir conclure à un échec pour une réduction en amont.

L'ajout de techniques liées aux explications [Jussien, 2001] permettrait sans doute de remédier à ce problème. Cependant, nous avons préféré, dans un premier temps, travailler sur le modèle plutôt que sur l'optimisation du solveur. En effet, en regardant le tableau 4, nous nous sommes aperçus que les contraintes d'unilatéralité pour les contacts 1 et 2 et la contrainte de rotation n'engendraient jamais aucune réduction des domaines des variables¹.

Les forces des contacts supérieurs d'un grain vérifient déjà les contraintes d'unilatéralité car ces forces ne sont pas quelconques mais issues des grains parents qui les ont calculé pour leur propre équilibre statique. Concernant la contrainte de rotation, la cardinalité élevée de celle-ci (six variables libres) empêche l'algorithme de filtrage de réduire les domaines des variables qu'elle contient. Or, remplacer une contrainte par une combinaison linéaire de celle-ci avec les autres permet d'obtenir un modèle équivalent contenant plus de contraintes mais de cardinalité maximale inférieure. Liret préconise l'utilisation de telles modifications du modèle afin d'améliorer les performances d'un solveur sur un problème donné [Liret, 2000].

1. C'est aussi le cas de la contrainte d'unilatéralité pour le contact 3 mais nous supposons qu'il s'agit d'un effet dû à l'ordre de filtrage des contraintes.

Contrainte	Cardinal	Nb moyen d'itérations	Nb moyen réductions	% de réductions
Coulomb 1.x et 2.x	1	2,00	1,00	50,00
Coulomb 3.a et 4.b	2	16,00	4,00	25,00
Coulomb 3.b et 4.a	2	10,00	5,00	50,00
Unilatéralité 1 et 2	1	2,00	0,00	0,00
Unilatéralité 3	2	4,00	0,00	0,00
Unilatéralité 4	2	4,00	0,26	6,59
Trans. horiz.	4	17,93	1,31	7,04
Trans. vert.	2	24,00	4,00	16,67
Rotation	6	28,00	0,00	0,00

TAB. 4 – Les performances du filtrage pour chacune des contraintes.

5.4 Ajout de contraintes redondantes

Dans le but d'augmenter les performances de notre solveur face à ce problème d'équilibre d'un grain, nous avons donc décidé de remplacer la contrainte de rotation (3) de cardinalité six par des combinaisons linéaires de cette première avec les contraintes d'équilibre par translation horizontale (1) et verticale (2). La contrainte (3) est donc remplacée par les contraintes suivantes :

$$(3) - (2) + (1) \quad -2Q_2 - 2q_3 - mg + (2s_3 + 2s_4) \tan(\theta) = 0 \quad (6a)$$

$$(3) - (2) - (1) \quad -2Q_2 - 2q_3 - mg + (-2s_1 - 2s_2) \tan(\theta) = 0 \quad (6b)$$

$$(3) + (2) - (1) \quad 2Q_1 + 2q_4 + mg + (-2s_1 - 2s_2) \tan(\theta) = 0 \quad (6c)$$

$$(3) + (2) + (1) \quad 2Q_1 + 2q_4 + mg + (2s_3 + 2s_4) \tan(\theta) = 0 \quad (6d)$$

Il est important de noter que ce nouveau modèle est strictement équivalent au précédent et ces modifications n'ont, par conséquent, aucune incidence sur les solutions trouvées. Le tableau 5 résume les cardinalités des contraintes pour ce nouveau modèle.

Cardinal	Nb contraintes	Référence des contraintes
1	4	Coulomb (5a), (5b), (5e) et (5f)
2	8	Translation verticale (2), Unilatéralité (4c) et (4d), Coulomb (5c), (5d), (5g) et (5h)
3	8	Combinaisons linéaires (6)
4	2	Translation horizontale (1)

TAB. 5 – Les cardinalités de l'ensemble des contraintes avec le remplacement de la contrainte de rotation par des combinaisons linéaires de celle-ci.

5.4.1 Performances

Avec cette nouvelle modélisation, le solveur converge rapidement dans 100% des cas (pour $\mu \leq 0.6$). Ses performances sont ainsi accrues du simple fait de la réécriture du

modèle. Par contre, à plus forte rugosité des grains, l'espace de recherche des solutions est trop grand pour que la recherche dichotomique puisse converger rapidement. Le tableau 6 donne une idée des performances de notre solveur pour le nouveau modèle de notre problème.

Frottement	Nb médian de tests de variables	Pourcentage médian de réductions	Nb max de tests de variables	Pourcentage d'échec
0.1	170	13,53	180	0
0.2	162	12,96	3932	3,59
0.3	160	11,90	3982	7,58
0.4	159	11,93	3978	6,49
0.5	158	11,97	4054	7,32
0.6	161	11,75	4344	7,55

TAB. 6 – Les performances de notre solveur pour un modèle équivalent obtenu par l'ajout de combinaisons linéaires de la contrainte de rotation.

5.5 Ajout d'une contrainte implicite

En détaillant les cas d'erreur lors de la phase de recherche de solutions par dichotomie, nous nous sommes rendus compte que ces erreurs correspondaient en fait à des forces importantes du grain. Nous avons donc ajouté deux contraintes en chacun des contacts de façon à ce que toutes les forces soient "rentrantes" vers l'intérieur du grain. Après discussion avec les physiciens de l'équipe, il s'est avéré que cette nouvelle contrainte leur semblait naturelle et évidente au point qu'ils l'avaient omise dans le modèle :

$$Q_1 \leq 0 \text{ (a)}, \quad s_1 \leq 0 \text{ (b)} \quad (7)$$

$$Q_2 \leq 0 \text{ (a)}, \quad s_2 \geq 0 \text{ (b)} \quad (8)$$

$$q_3 \geq 0 \text{ (a)}, \quad s_3 \geq 0 \text{ (b)} \quad (9)$$

$$q_4 \geq 0 \text{ (a)}, \quad s_4 \leq 0 \text{ (b)} \quad (10)$$

Pour la même raison que nous avons supprimé les contraintes d'unilatéralité sur les forces des contacts supérieurs, nous supprimons les contraintes de forces rentrantes concernant ces mêmes contacts.

5.5.1 Performances et perspectives pour le solveur

L'ajout de ces nouvelles contraintes nous permet d'obtenir une consistance globale à l'issue de la phase de filtrage. Nous pouvons alors nous passer de la phase de recherche dichotomique. Les performances de notre solveur sont donc maintenant celles de l'algorithme de filtrage. Le tableau 7 donne une idée des performances de notre solveur pour le nouveau modèle de notre problème avec forces "rentrantes".

Frottement	Nb moyen de tests de variables	Pourcentage moyen de réductions	Nb max de tests de variables	Pourcentage d'échec
0.1	1613	26.65	3092	0.00
0.3	1737	5.00	3982	0.00
0.5	1867	4.78	4010	0.00
0.7	1775	4.45	3944	0.00
0.9	1754	4.39	3986	0.00

TAB. 7 – Les performances de notre solveur pour le modèle précédent mais avec l'ajout des contraintes de forces "rentrantes".

6 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons voulu montrer qu'une modélisation purement multi-agent pouvait être insuffisante pour simuler efficacement des systèmes complexes en physique. A l'inverse, la modélisation sous forme d'un unique CSP de tels problèmes rend leurs résolutions quasi-impossible devant la taille des systèmes de contraintes et de variables à appréhender. Pour notre problème de simulation d'empilements de grains, l'ajout d'un solveur de CSP au modèle d'agent-grain existant s'est montré fructueux et efficace. Ceci est le franchissement d'une première étape vers une intégration plus poussée entre agents et CSP dans le cadre de GranuSolve. En effet, il est regrettable que le travail de filtrage effectué par un CSP sur un grain soit ensuite perdu pour les grains voisins. Ainsi, une perspective possible consiste à modéliser les CSP directement comme des agents afin qu'ils puissent communiquer et propager des valeurs de forces entre grains mais aussi collaborer entre solveurs pour aboutir à une solution collective.

Une autre perspective concerne la réécriture automatique des contraintes du modèle. Un solveur automatique de problèmes sous contraintes devrait être capable de réécrire les contraintes du modèle aux vues des performances de filtrage de celles-ci. Ainsi, la technique de remplacement d'une contrainte par des combinaisons linéaires de celle-ci avec les autres devrait améliorer les performances du solveur pour un problème donné.

De plus, dans le cadre de CSP distribués, une fonctionnalité intéressante serait la découverte automatique de contraintes émergentes dues aux interactions entre CSP homogènes. Ainsi, la découverte de telles contraintes permettrait à l'expert de mieux comprendre le problème et au solveur d'être plus efficace.

Références

- [Breton *et al.*, 2000] Laurent Breton, Jean-Daniel Zucker, et Eric Clément. A multi-agent based simulation of sand piles in a static equilibrium. *Multi-Agent Based Simulation Workshop in Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 1979:108–118, 2000.
- [Breton *et al.*, 2002] Laurent Breton, Philippe Claudin, Eric Clément, et Jean-Daniel Zucker. Stress response function of a two-dimensional ordered packing of frictional beads. *Europhysics Letters*, 60(2):813–819, 2002.
- [Breton, 2002] Laurent Breton. *GranuLab : un système d'aide à la découverte scientifique pour la physique des milieux granulaires*. Thèse de Doctorat, Université Paris 6, 2002.

- [de Gennes, 1995] Pierre-Gilles de Gennes. Dynamique superficielle d'un matériau granulaire. *C. R. Acad. Sciences*, 10(321 [IIb]):501–506, 1995.
- [De Josselin de Jong et Verruijt, 1969] G. De Josselin de Jong et A. Verruijt. Etude photo-élastique d'un empilement de disques. *Cah. Gr. Franc. Rhéol.*, 2:73, 1969.
- [Drogoul, 1993] Alexis Drogoul. *De la simulation multi-agent à la résolution collective de problèmes. Une étude de l'émergence de structures d'organisation dans les systèmes multi-agents*. Thèse de Doctorat, Université Paris 6, 1993.
- [Eloy et Clément, 1997] Christophe Eloy et Eric Clément. Stochastic aspects of the force network in a regular granular piling. *J. Phys. I*, 7:1541–1558, december 1997.
- [Ferber, 1990] Jacques Ferber. Eco-problem-solving: How to solve problems by interactions. Rapport Technique 05/90, Laboratoire Formes et Intelligence Artificielle, Paris 6, janvier 1990.
- [Jussien, 2001] Narendra Jussien. Programmation par contraintes avec explications. In *7ièmes Journées nationales sur la résolution pratique de problèmes NP-complets (JNPC'01)*, pages 147–158, Juin 2001.
- [Liret, 2000] Anne Liret. *Intégration de Mécanismes de Réécriture dans un Système de Satisfaction de Contraintes*. Thèse de Doctorat, Université Paris 6, LIP6 2001/009, octobre 2000.
- [Radjai, 1995] Farhang Radjai. Dynamique des rotations et frottement collectif dans les systèmes granulaires, décembre 1995.
- [Travers *et al.*, 1986] T. Travers, M. Ammi, D. Bideau, et A. Gervois. Uniaxial compression effects on 2d mixtures of 'hard' and 'soft' cylinders. *J. Phys. A*, 19:L1033–L1038, 1986.
- [Tsang, 1993] E. Tsang. *Foundations of Constraint Satisfaction*. Academic Press, 1993.